

CHAPITRE 1

ANALYSE DIMENSIONNELLE

ANALYSE DIMENSIONNELLE

On distingue sept grandeurs fondamentales indépendantes :

Grandeur de base	Dimension	Nom de l'unité (SI)	Symbole (SI)	Nom de l'unité (CGS)	Symbole (CGS)
Longueur	L	Mètre	M	Centimètre	Cm
Masse	M	Kilogramme	Kg	Gramme	G
Temps	T	Seconde	S	Seconde	S
Intensité du courant	I	Ampère	A	/	/
Température	Θ	Kelvin	K	/	/
Quantité de matière	N	Mole	Mol	/	/
Intensité lumineuse	J	Candela	Cd	/	/

Deux autres grandeurs sont utilisées en complément et sont dépourvues de dimension physique

Angle plan	1	Radian	Rad
Angle solide	1	Stéradian	Sr

Différents systèmes d'unités :

Un système cohérent d'unités : est construit autour du nombre minimal d'unités indépendantes, sont les unités fondamentales, et à partir desquels toutes les autres grandeurs physiques peuvent être exprimées.

Le système CGS [centimètre, gramme, seconde] ;

Le système MTS [mètre, tonne, seconde] ;

Le système international (SI) : dénommé également MKSA [mètre, kilogramme, seconde et ampère] ;

Une grandeur peut avoir plusieurs unités mais ne peut avoir qu'une seule dimension. (Ex : la longueur peut être exprimé en kilomètre, mètre, centimètre, micromètre, yard, mile, etc. mais sa dimension est unique $[l] = L$)

Dimension d'une grandeur physique (Equations aux dimensions) :

Toute grandeur physique est caractérisée par sa dimension noté $[G]$ qui nous informe sur sa nature physique .

La dimension de la grandeur G étant : $[G] = L^a M^b T^c I^d \theta^e J^f N^g$

➤ Propriétés importantes :

- $[A \times B] = [A] \times [B]$,
- $[A/B] = [A]/[B]$
- $A \pm B = C \Leftrightarrow [A \pm B] = [A] = [B] = [C]$
- Pour les fonctions $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ on a x est un angle or sa dimension $[x] = 1$
- Pour les fonctions $\log(x)$, $\exp(x)$ on a également $[x] = 1$

Une équation est dite homogène si ses deux membres ont la même dimension.

➤ Exemple d'application : On exprime la vitesse d'un corps par l'équation suivante :

$$v = At^3 - Bt \text{ ou } t \text{ représente le temps.}$$

Quelles les dimensions de A et B ainsi que leurs unités dans les système (SI) et (CGS)?

➤ Solution :

Dimension de v s'écrit : $[v] = LT^{-1}$ et l'unité de v change selon le système choisi.

$$\begin{cases} \text{m s}^{-1} & \text{dans SI} \\ \text{cm s}^{-1} & \text{dans CGS} \end{cases}$$

Cette équation $v = At^3 - Bt$ doit être homogène c.-à-d. $[v] = [A][t]^3 - [B][t]$

L'équation aux dimensions étant : $LT^{-1} = [A]T^3$ et $LT^{-1} = [B]T$

Par conséquent la dimension de A s'écrit $[A] = LT^{-4}$ et la dimension de B s'écrit $[B] = LT^{-2}$

L'unité de A : $\begin{cases} \text{m s}^{-4} & \text{dans SI} \\ \text{cm s}^{-4} & \text{dans CGS} \end{cases}$ et l'unité de B : $\begin{cases} \text{m s}^{-2} & \text{dans SI} \\ \text{cm s}^{-2} & \text{dans CGS} \end{cases}$

Toute équation non homogène ne peut être que fausse.

Nom de la grandeur physique dérivée G	Symbole de la grandeur physique	Dimension [G]	Nom de l'unité de mesure(SI)	Symbole de l'unités. (SI)	Expression en unité (SI)
Longueur	l	L	Mètre	M	M
Surface	$S = x.y$	L^2	Mètre carré	m ²	m ²
Volume	$V = x.y.z$	L^3	Mètre cube	m ³	m ³
Temps	t	T	Seconde	S	S
Fréquence (T : période)	$f = 1/T$	T^{-1}	Hertz	Hz	s ⁻¹
Pulsation	$\omega = 2\pi/T$	T^{-1}	Seconde ⁻¹	Rad s ⁻¹	s ⁻¹
Vitesse	$v = l/t$	LT^{-1}	Mètre par seconde	ms ⁻¹	ms ⁻¹
Accélération	$a = v/t$	LT^{-2}	Mètre par seconde carrée	ms ⁻²	ms ⁻²

Masse	M	M	Kilogramme	Kg	Kg
Masse volumique	$\rho = M/V$	ML^{-3}	Masse par unité de volume	$kg\ m^{-3}$	$kg\ m^{-3}$
Force	$F = ma$	MLT^{-2}	Newton	N	$kg\ ms^{-2}$
Quantité de mouvement	$p = mv$	MLT^{-1}	Kilogramme mètre par seconde	$kg\ ms^{-1}$	$kg\ ms^{-1}$
Travail ,Energie cinétique et potentielle	$W = F.l$	ML^2T^{-2}	Joule	$J = Nm$	$kg\ m^2\ s^{-2}$
Puissance	$p = W/t$	ML^2T^{-3}	Watt	$W=Js^{-1}$	$kg\ m^2\ s^{-3}$
Pression	$P = F/S$	$ML^{-1}T^{-2}$	pascal	$Pa=Nm^{-2}$	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$
Température	T	θ	Kelvin	K	K
Chaleur= Energie	Q	ML^2T^{-2}	Joule	J	J
Intensité de courant	I	I	Ampère	A	A
Charge électrique	$q = It$	IT	Coulomb	$C=As$	A s
Tension électrique	$U = p/I$	$ML^2T^{-3}I^{-1}$	Volt	$V=JA$	$kg\ m^2s^{-3}A^{-1}$
Capacité d'un condensateur	C	$M^{-1}L^{-2}T^4I^2$	Farad	F	$kg^{-1}\ m^{-2}s^4A^2$

Remarques importantes .

- Il faut faire la différence entre dimension d'une grandeur et unité d'une grandeur :

Dim de G s'écrit [G] et l'unité de G est donnée selon le système choisi soit CGS, MTS, MKSA ...etc.

- La dimension de G nous permet le contrôle rapide des unités ;
- L'unité de la charge électrique Q est C (le Coulomb SI) sa dimension étant [Q]= IT ;
- L'unité de la capacité d'un condensateur C est F (le farad SI) sa dimension [C]=M⁻¹L⁻²T⁴ I².
- Le symbole du temps est t et celui de la température est T ;
- Dimension d'un temps est [t]=T son unité est la seconde(SI) et la dimension d'une température est [T]=Θ son unité est le Kelvin (SI).

Autre exemple d'application .

Le principe fondamental de la dynamique donne la dimension physique de la force :

$f = m \frac{d^2r}{dt^2}$; L'équation aux dimensions de la force est $[f] = MLT^{-2}$ et son unité dans le système SI est le $kg \ m \ s^{-2}$ couramment appelée Newton par contre son unité dans le système CGS est $g \ cm \ s^{-2}$ couramment appelée Dyne. Une dyne vaut exactement 10^{-5} newtons.

Définition du Newton : c'est la force qui communique, à un corps ayant une masse de 1 kilogramme, une accélération de 1mètre par seconde carrée.

Définition du Dyne : est défini comme la force requise pour accélérer une masse d'un gramme de 1Gal. (c.-à-d. $1Gal = 1cm/s^2$)

Le gal (symbole Gal); parfois appelé galileo, est l'unité d'accélération utilisée largement dans la science de la gravimétrie.